Elżbieta Babula
Anna Blajer-Gołębiewska

ROZDZIAŁ 3

INTERPRETACJA PARADOKSU ALLAISA ZA POMOCĄ MODELU KONFIGURALNIE WAŻONEJ UŻYTECZNOŚCI

Wprowadzenie

Jednym z podstawowych założeń ekonomii jest postulat racjonalności indywidualnego decydenta. Założenie to przez wiele lat było aksjomatem, którego zweryfikowanie było metodologicznie niemożliwe. Dopiero stworzenie zaksjomatyzowanej teorii wyboru w warunkach ryzyka dało podstawę do podważania tego założenia w oparciu o bogate wyniki badań empirycznych. W ten sposób teoria wyboru w warunkach ryzyka stała się swoistym narzędziem badania racjonalności indywidualnych decydentów.

Wyniki badań eksperymentalnych, wykazując niezgodność z prognozami modeli, stały się podstawą do podważania postulatu racjonalności, co w rezultacie często prowadziło do „rozluźniania" definicji racjonalności, tak aby możliwe było utrzymanie tak ważnego dla ekonomii założenia. Jednakże w przypadku wielu odkrytych wzrorców zachowań (niezgodnych z teorią użyteczności oczekiwanej) takie działanie nie jest konieczne. Okazuje się, że rozwój teorii wyboru w warunkach ryzyka w ramach przyjętej definicji racjonalności umożliwia ich wyjaśnienie.

Celem artykułu jest pokazanie tego mechanizmu działania na przykładzie paradoksu Allaisa i teorii konfiguralnie ważonej użyteczności (RDEU). Zastosowaną dla realizacji celu metodą jest analiza przypadku. Konstruowany jest przykład, który pokazuje, że istnieją takie preferencje (funkcja użyteczności) zgodne z definicją racjonalności, dla których zachowanie takie jak w eksperymencie Allaisa jest uzasadnione w ramach teorii RDEU. Zatem paradoks ten nie może być uznany jako podważanie postulatu racjonalności.

Definicja racjonalności

W potocznym użyciu sformułowanie „racjonalne zachowanie" ma przynajmniej dwa znaczenia. Pierwsze odnosi się do metody, drugie zaś do efektu działania. Jako metoda racjonalne zachowanie jest działaniem wybranym w sposób uzasadniony, nie zaś wynikającym z przyzwyczajenia, emocji czy przesądów. W odniesieniu do rezultatów zachowanie racjonalne jest działaniem, które pozwala w sposób efektywny osiągnąć założony cel (Hirshleifer i inni, 2005, s. 9).

W ujęciu formalnym istnieje wiele podejść do racjonalnego zachowania w warunkach pewności, lecz można wyróżnić dwa podstawowe. Pierwsze podkreśla wewnętrzną spójność wyborów. Formułowane jest założenie, że dla różnych podzbiorów zbioru możliwych działań dokonywane wybory powinny ze sobą korespondować w sposób przekonujący i systematyczny. Proponowane były różne warunki wewnętrznej spójności, ale najbardziej zasługuje na uwagę ten, zgodnie z którym dokonane wybory mogą być przedstawione jako rozwiązanie optymalizacji pewnej binarnej relacji R w ramach odpowiednich podzbiorów działań. Relacja ta często interpretowana jest jako relacja preferencji. Inaczej można powiedzieć, że racjonalne zachowanie wymaga, aby istniała taka relacja preferencji R na całym zbiorze działań, że wybór z danego podzbioru jest zgodny z maksymalizacją relacji *R* w danym podzbiorze. W szczególności wymagane jest, aby relacja *R* ustanawiała określony porządek między działaniami, czyli aby była zupełna i przechodnia. Ujęcie racjonalności dominujące obecnie w literaturze zalicza się więc do tej kategorii racjonalnych zachowań.

Drugie podejście do racjonalnego zachowania rozpatruje wybory w kontekście uzasadnionego dążenia do własnych korzyści. To podejście silniej nawiązuje do klasyków i koncepcji *homo oeconomicus*. Ujęcie to wydaje się być węższe, gdyż ogranicza intencje działania człowieka jedynie do motywów ekonomicznych. Można wykazać, że racjonalne zachowanie, wynikające z dążenia do korzyści własnych, będzie wewnętrznie spójne, lecz nie każde wewnętrznie spójne zachowanie da się sprowadzić do maksymalizacji korzyści własnych (Sen, 1998, s. 69).

Pierwsze pole dla empirycznych badań racjonalności powstało wraz z powstaniem teorii wyboru w warunkach ryzyka, popartej pełną aksjomatyką, precyzującą racjonalną relację preferencji. W oparciu o teorię użyteczności oczekiwanej von Neumanna i Morgensterna udało się wykazać szereg niespójności rzeczywistych zachowań graczy z teoretycznymi zachowaniami optymalnymi (Starmer, 2000, s. 336-339). Badania wykazywały między innymi nieprzechodniość preferencji, złe rozumienie statystycznej niezależności zdarzeń czy niezdolność rozróżnienia danych o charakterze losowym od danych zawierających systematyczne zależności (Conlisk, 1996, s. 670-671). Jednym z pierwszych przykładów zachowań niezgodnych z teorią użyteczności oczekiwanej jest paradoks Allaisa. Uważany jest on czasem za przykład niespójności wyborów, a zatem za kontrprzykład dla postulatu racjonalności podmiotów podejmujących decyzje.

Teoria wyboru w warunkach ryzyka

Teoria wyboru jest zbiorem twierdzeń dotyczących reguł wyboru wskazujących - dla każdego zbioru osiągalnych działań - działanie, które faktycznie będzie wybrane (Arrow, 1979, s. 60). W ramach teorii wyboru w warunkach ryzyka dokonano precyzyjnej formalizacji problemu decyzyjnego oraz określono reguły decyzyjne, które opisują, w jaki sposób dokonywane są wybory. Reguły zgodne są z opisanymi powyżej wymogami racjonalności wyboru. Są to więc zasady optymalizacji przy określonych założeniach, najczęściej przyjmowane w tej teorii jako warunek konieczny racjonalności.

Przedmiotem badań teorii wyboru w warunkach ryzyka są problemy decyzyjne. Do opisu problemu decyzyjnego buduje się model matematyczny. W celu formalizacji wprowadza się pojęcia: *stanów natury*, *działań* i *następstw*. Stan natury jest to opis świata tak pełny, że gdyby był prawdziwy i znany, to znane byłyby następstwa każdego działania. Działaniem jest każda możliwa do podjęcia decyzja, zaś pojęciem następstwo lub perspektywa nazywa się możliwy wariant przyszłego przebiegu zdarzeń (Lindgren, 1977, s. 36). Następstwo to wynik, będący rezultatem podjęcia określonej decyzji przy zaistniałym stanie otoczenia. Wynik taki nie zawsze jest jednoznacznie określony. Stan świata oznaczono symbolem s, działanie symbolem a, zaś następstwo działania ogólnie oznaczono symbolem $\mathbf{x}$.

Warunki ryzyka to sytuacja, gdy możliwe są różne stany otoczenia, ale podejmujący decyzję zna prawdopodobieństwo ich wystąpienia. Ryzyko dotyczy tu w istocie następstw, nie działań i ze względu na to rozróżnienie pojęć staje się bardzo istotne. Informacja wówczas ma charakter probabilistyczny, w przeciwieństwie do sytuacji niepewności, gdzie podmiot zna wszystkie możliwe stany natury, lecz nie wie, jakie jest prawdopodobieństwo ich zajścia w rzeczywistości (Forlicz, Jasiński, 2000, s. 21-22).

W problemie decyzyjnym tego typu perspektywa ma charakter losowy. Nazywana jest perspektywą losową albo loterią. Loteria może być prosta lub złożona. Loteria prosta to każdy dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa określony na parze wyników x_1, x_2. Do oznaczenia loterii prostej przyjęto notację (x_1, p, x_2), gdzie p to prawdopodobieństwo zajścia x_1. Inne oznaczenia loterii to $\mathbf{x} = (x_1, p; x_2, 1\text{-}p)$.

Loterią złożoną nazywa się mieszankę innych loterii prostych lub złożonych (Heilpern, 2001, s. 60). Taką loterią będzie przykładowo $\mathbf{x}^1=(\mathbf{x}, q, x_3)$. Każdą loterię złożoną można przedstawić w postaci zredukowanej. Postać zredukowana loterii $\mathbf{x}^1$ to $((x_1, p, x_2), q, x_3) = (x_1, pq; x_2, (1\text{-}p)q; x_3, 1\text{-}q)$. W teorii wyboru najczęściej zakłada się, że ludzie redukują loterie złożone. Wymaga to jednak przeprowadzenia operacji mnożenia prawdopodobieństwa. Założenie to więc nie jest takie oczywiste.

Przy tak sformułowanej notacji problem wyboru polegać będzie na znalezieniu takiego działania **x** ze zbioru wszystkich możliwych działań, dla którego optymalna jest użyteczność lub relacja preferencji określona na zbiorze następstw rozważanych działań. To, jaka kategoria: użyteczność czy preferencje jest przedmiotem optymalizacji, zależy od przyjętej teorii wyboru. W literaturze przedmiotu można znaleźć bardzo wiele modeli wyboru w warunkach ryzyka. Podstawową teorią jest model maksymalizacji użyteczności oczekiwanej von Neumanna-Morgensterna (*expected utility theory* - EUT), zaś pozostałe modele nazywane są w literaturze popularnie „teorią użyteczności nie-oczekiwanej" (*non-expected utility theory*). Pojęcie to jednak nie wyznacza formalnej klasyfikacji.

Można wyróżnić dwie klasyfikacje teorii wyboru w warunkach ryzyka. W pierwszej kryterium podziału wyznacza przyjęty rodzaj reguły decyzyjnej (Kozielecki, 1975, s. 153). Ze względu na to modele można podzielić na:

- strategie algorytmiczne,
- strategie heurystyczne.

Pierwsze z nich to systemy reguł, które są dobrze określone i które pozwalają dokonać wyboru działania w skończonej liczbie kroków. Strategie heurystyczne to system reguł, zasad i intuicji heurystycznych, które są dużo mniej dokładnie określone i które nie zawsze pozwalają rozwiązać zadanie.

Druga klasyfikacja teorii wyboru przyjmuje za kryterium podziału przyjęte w teorii założenia odnośnie do preferencji w stosunku do perspektyw losowych. Ze względu na to kryterium modele dzieli się na konwencjonalne i niekonwencjonalne (Starmer, 2000, s. 332-333). Modelami konwencjonalnymi nazywa się te, w których zakłada się, że wybór można wyjaśnić jako optymalizację pewnej dobrze sprawującej się funkcji użyteczności w warunkach ryzyka. Funkcja ta jest reprezentacją relacji preferencji, określonej na zbiorze wszystkich perspektyw losowych i spełniającej opisane aksjomaty relacji preferencji. Do teorii konwencjonalnych zalicza się między innymi teorię użyteczności oczekiwanej oraz teorię konfiguralnie ważonej użyteczności (*rank dependent expected utility theory* - RDEU).

Teoria użyteczności oczekiwanej

Pierwsze zastosowanie modelu użyteczności oczekiwanej to rozwiązanie paradoksu petersburskiego przez Daniela Bernoulliego w 1738 roku. Koncepcja Bernoulliego musiała czekać na zainteresowanie aż do 1947 roku, gdy John von Neumann i Oskar Morgenstern opublikowali słynną pracę *Theory of choice and economic behavior*. W swojej teorii przyjęli oni, że racjonalny agent postępuje zgodnie z zasadą maksymalizacji wartości oczekiwanej użyteczności, nazywaną zasadą Bernoulliego (Heilpern, 2001, s. 57). Wkład von Neumanna i Morgensterna do teorii to udowodnienie, że taka funkcja użyteczności oczekiwanej istnieje. Zbudowali oni aksjomatykę preferencji i na jej podstawie pokazali istnienie funkcji użyteczności. Funkcja U posiadająca własność:

$$U(\mathbf{x}) = EU(\mathbf{x})$$

nazywana jest funkcją użyteczności von Neumanna - Morgensterna.

W praktyce funkcja użyteczności jest nieznana. Dla uproszczenia konstruuje się funkcję użyteczności na zbiorze obciętym do zbioru tych następstw, które są pozbawione ryzyka. Jeżeli następstwa te są wyrażone w jednostkach pieniężnych, to opisana na nich funkcja użyteczności nazywana jest funkcją użyteczności majątku (pieniądza) $U(w)$, gdzie w to wartość majątku. W dalszej kolejności przyjmuje się, że użytecznością loterii jest wartość oczekiwana użyteczności wyników, będących składowymi tej loterii. Zatem dla loterii $\mathbf{x} = (x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots; x_n, p_n)$ użyteczność loterii będzie równa:

$$EU = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) \cdot p_i \,.$$

Zgodnie z teorią von Neumanna – Morgensterna wybrana zostanie ta decyzja, dla której wartość oczekiwana użyteczności jest maksymalna. Wybór ten będzie różny w zależności od kształtu krzywej użyteczności $U(\cdot)$. Wklęsłość krzywej wskazuje na postawę asekuranta, wypukłość na postawę ryzykanta, zaś prosta odzwierciedla postawę neutralną wobec ryzyka.

Funkcja użyteczności oczekiwanej, ze względu na swoją prostą konstrukcję, spełnia szereg własności, z których podstawowe to:

- skala użyteczności jest określona jednoznacznie z dokładnością do przekształcenia liniowego (z dokładnością do wyboru punktu zerowego i jednostki pomiaru);
- jest funkcją liniową ze względu na prawdopodobieństwa. Liniowość jest ściśle związana z aksjomatem niezależności[1] (Machina, s. 125-127);
- jest monotoniczna ze względu na wypłaty. Dla danej perspektywy losowej zwiększanie dowolnej wypłaty zwiększa użyteczność tej loterii;
- spełnia warunek dominacji stochastycznej[2].

Paradoks Allaisa (*common consequence effect*)

W odpowiedzi na teorię użyteczności oczekiwanej i jej aksjomatyzację w 1953 roku Maurice Allais, ekonomista francuski, laureat Nagrody Nobla, zaproponował eksperyment podważający przewidywania teorii EU. Eksperyment miał na celu pokazanie wyborów niezgodnych z aksjomatem niezależności, a tym samym wykazujących brak liniowości funkcji użyteczności oczekiwanej (Allais, 1953).

Doświadczenie Allaisa pokazuje niespójność decyzyjną, która uwidacznia się przy porównaniu wyborów między dwiema parami loterii: A i B oraz C i D. Obrazujące paradoks Allaisa gry przedstawiono na rysunku 1. Oferowane w eksperymencie wypłaty są bardzo duże, dlatego wyniki eksperymentu odzwierciedla ją tylko hipotetyczne wybory badanych (Conlisk, 1989).

[1] Aksjomat niezależności dotyczy relacji prefrencji racjonalnego decydenta w warunkach ryzyka. Mówi on, że jeżeli następstwo $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$ ($\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$), to dla dowolnego prawdopodobieństwa $p \in [0,1]$ i dla dowolnego następstwa $\mathbf{x}$ spełnione jest: $(\mathbf{x}^1, p, \mathbf{x}) \succ (\mathbf{x}^2, p, \mathbf{x})$ ($(\mathbf{x}^1, p, \mathbf{x}) \sim (\mathbf{x}^2, p, \mathbf{x})$).Oznacza to, że jeżeli dwa rozważane następstwa $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ wymieszane zostaną z trzecim $\mathbf{x}$, to preferencje w stosunku do otrzymanych mieszanek są niezależne od użytego następstwa $\mathbf{x}$.

[2] Dominacja stochastyczna mówi o tym, że wraz ze zmianą rozkładu prawdopodobieństwa perspektywy losowej w ten sposób, że zwiększa się prawdopodobieństwo wypłaty wyższej, zmniejszając tym samym prawdopodobieństwo wypłaty niższej, użyteczność z loterii powinna rosnąć. Innymi słowy, spośród dwóch perspektyw losowych o takich samych wypłatach, dominująca jest ta, w której wyższe są prawdopodobieństwa związane z wyższymi wypłatami (Savage, 1972, s. 114-115).

Rysunek 1. Paradoks Allaisa

	wypłata	szansa		wypłata	szansa
A:	100 mln;	100%	B:	500 mln;	10%
				100 mln;	89%
				0;	1%
C:	100 mln;	11%	D:	500 mln;	10%
	0;	89%		0;	90%

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Allais M., (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulates et axiomes de l'ecole americaine, Econometrica, tom 21, nr 4, s. 527.

Okazuje się, że większość osób, mając do wyboru gry A i B - wybrałoby A. Jednocześnie te same osoby, mając do wyboru gry C i D - wybrałyby D. Istotę paradoksu można pokazać przekształcając gry Allaisa do niezredukowanej formy (rysunek 2). W przypadku loterii A i B możliwe jest wydzielenie opcji, jaką jest wygranie 100 mln z prawdopodobieństwem 89%. Zgodnie z aksjomatem niezależności, ponieważ opcja ta jest wspólna dla obu gier, nie powinna mieć wpływu na wybór. Wybór pomiędzy A i B zredukować można do wyboru pomiędzy grami, z których pierwsza oferuje wygraną 100 mln z prawdopodobieństwem 11%, zaś druga oferuje wygraną 500 mln z prawdopodobieństwem 10% albo 0 z prawdopodobieństwem 1%.

Rysunek 2. Paradoks Allaisa w niezredukowanej formie

	wypłata	szansa		wypłata	szansa
A:	100 mln;	11%	B:	500 mln;	10%
				0;	1%
	100 mln;	89%		100 mln;	89%
C:	100 mln;	11%	D:	500 mln;	10%
				0;	1%
	0;	89%		0;	89%

Źródło: opracowanie własne.

Podobnej redukcji można dokonać dla gier C i D. W obu grach można nic nie wygrać z prawdopodobieństwem 89% (rysunek 2). Jeżeli, zgodnie z aksjomatem niezależności, ten wspólny dla gier wynik nie wpływa na decyzję, to wybór między C i D redukuje się do takiego samego wyboru, co między A i B. Dlatego też z teorią użyteczności oczekiwanej zgodne są wybory A i C lub B i D. Jednoczesny wybór A i D jest paradoksalny z punktu widzenia własności teorii użyteczności oczekiwanej.

Teoria konfiguralnie ważonej użyteczności (RDEU)

Spośród modeli konwencjonalnych, poszukujących generalizacji modelu EUT, najbardziej popularnym modelem z wagami decyzyjnymi jest model konfiguralnie ważonej użyteczności (*rank dependent expected utility* - RDEU). Autorem tej teorii jest John Quiggin (Quiggin, 1982). Zaproponował on nowy sposób modelowania nieliniowych prawdopodobieństw, czyli wag decyzyjnych. Założył, że ocena prawdopodobieństwa danego wyniku zależy od pozycji, którą ten wynik zajmuje w rozkładzie innych wyników (np. czy jest najlepszy czy najgorszy). Quiggin doszedł do wniosku, że jeżeli waga prawdopodobieństwa określonego wyniku zależy od jego pozycji, to nieliniowe przekształcenia psychologiczne są dokonywane nie na pojedynczych, ale na skumulowanych prawdopodobieństwach (Sokołowska, 2005, s. 159). W teorii tej wyniki są uporządkowane. Jeśli x_1 to najgorszy wynik, zaś x_n najlepszy, to w teorii RDEU decydent maksymalizuje funkcję z wagami:

$$w_i = \pi(p_i + ... + p_n) - \pi(p_{i+1} + ... + p_n)\text{, dla } i = 1,...,n-1 \tag{1}$$

$$w_i = \pi(p_i)\text{, dla } i = n \tag{2}$$

W modelu tym występuje rozróżnienie między wagami decyzyjnymi (w), a wagami prawdopodobieństwa (π). Proponowana jest następująca interpretacja: funkcja ważąca prawdopodobieństwa odzwierciedla „psychofizykę ryzyka", tzn. sposób w jaki jednostki subiektywnie „wypaczają" obiektywne prawdopodobieństwa; waga decyzyjna dalej determinuje w jakim stopniu wagi prawdopodobieństwa wpływają na funkcję wartości $V(\cdot)$. Pierwszy człon funkcji (1) $\pi(p_i + ... + p_n)$ jest subiektywną wagą przypisaną do prawdopodobieństwa uzyskania wyniku x_i lub lepszego, zaś drugi człon $\pi(p_{i+1} + ... + p_n)$ jest wagą przypisaną do prawdopodobieństwa uzyskania wyniku lepszego od x_i. Stąd $\pi(x_i)$ jest transformacją na łącznym prawdopodobieństwie.

Taka procedura przypisywania wag gwarantuje, że funkcja konfiguralnie ważonej użyteczności oczekiwanej

$$V(x) = \sum_i w_i \cdot U(x_i) \tag{3}$$

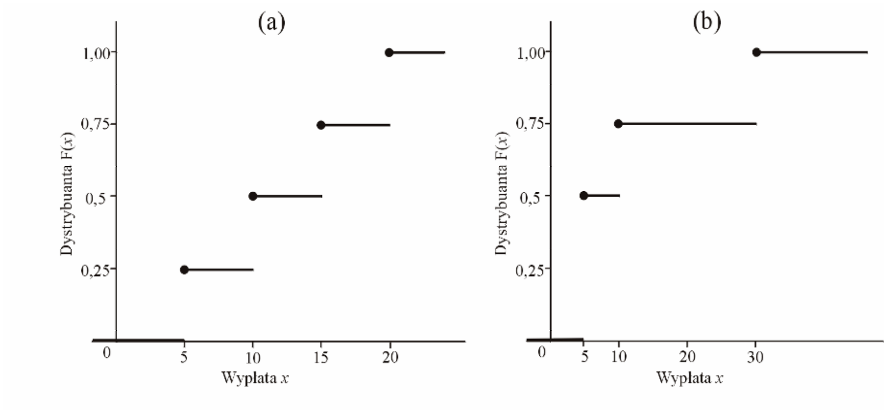
jest monotoniczna ze względu na wielkości wypłat oraz spełnia warunek dominacji stochastycznej.

Waga przypisywana do wyniku w modelu RDEU może się zmieniać w zależności od tego, jak „dobry" lub „zły" jest wynik. Umożliwia to skrajnym wynikom osiąganie szczególnie wysokich lub niskich wag. Dodatkowo mała zmiana wartości wyniku perspektywy może mieć istotny wpływ na wagi decyzyjne, jeżeli zmieniona zostanie przez to kolejność w rankingu danej loterii. Ale dowolnie duża zmiana wartości wyniku nie będzie miała wpływu na wagi decyzyjne, jeżeli nie zmieni kolejności w rankingu (Starmer, 2000, s. 347-348). Dzieje się tak dlatego, że waga decyzyjna zależy tylko od prawdopodobieństwa i miejsca wypłaty w rankingu. Nie zależy ona od wysokości wypłaty. Oznacza to, że dla dwóch perspektyw losowych, jeśli jedna z wypłat ma to samo miejsce w rankingu i osiągana jest z tym samym prawdopodobieństwem, to ma taką samą wagę decyzyjną.

Miejsce w rankingu wyznaczane jest nie tyle przez kolejność wypłat, co przez dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa. Pozycją rankingową wypłaty x_i nazywa się prawdopodobieństwo, że zostanie osiągnięta ta wypłata lub mniejsza (Diecidue, Wakker, 2001, s. 285). Pozycja rankingowa x_i jest więc równa dystrybuancie $F(x_i) = P(x \le x_i)$.

Dla lepszego zrozumienia istoty teorii RDEU, można przeanalizować następujący przykład. Rozważane są dwie perspektywy losowe $\mathbf{x}^1 = (5,\frac{1}{4};10,\frac{1}{4};15,\frac{1}{4};20,\frac{1}{4})$ oraz $\mathbf{x}^2 = (5,\frac{1}{2};10,\frac{1}{4};30,\frac{1}{4})$. Rysunek 3 przedstawia dystrybuanty rozkładu dla loterii $\mathbf{x}^1$ (a) i dla loterii $\mathbf{x}^2$ (b).

Rysunek 3. Dystrybuanty rozkładów dwóch perspektyw losowych obrazujące pozycje rankingowe wypłat

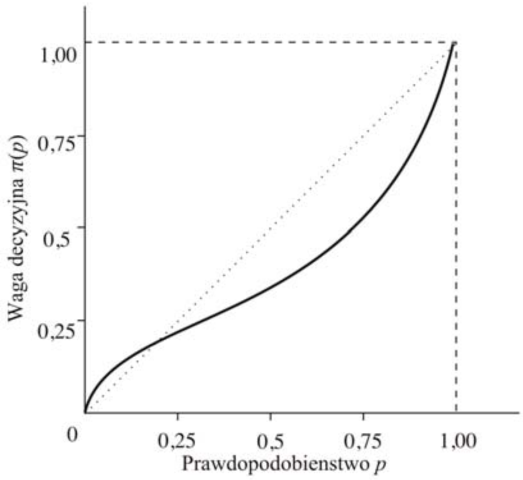


Źródło: Opracowanie własne.

Pozycja rankingowa wypłaty $x_1^1 = 5$ pierwszej loterii $(F(x_1^1) = 0{,}25))$, nie jest równa pozycji rankingowej tej samej wypłaty w loterii drugiej $(F(x_1^2) = 0{,}5))$. Nie ma tu znaczenia, że w obu loteriach 5 jest najmniejszą wypłatą. Pozycja rankingowa zależy od prawdopodobieństwa związanego z daną wypłatą.

Dla obu perspektyw losowych obliczono wagi decyzyjne. Przyjęto, że osoba podejmująca decyzję w sposób subiektywny postrzega prawdopodobieństwa, zaś przebieg funkcji ważącej prawdopodobieństwo dla tej osoby jest taki, jak na rysunku 4.

Rysunek 4. Funkcja ważąca prawdopodobieństwa



Źródło: Handa J., (1977), Risk, Probabilities, and a New Theory of Cardinal Utility, Journal of Political Economy, nr 85, s. 113-114.

Przedstawiona na rysunku krzywa przedstawia funcję ważącą prawdopodobieństwa o kształcie odwróconego S (*inverted S-shaped function*). Konstrukcja ta pozwala uwzględnić w modelu subiektywny stosunek decydenta do rozkładu prawdopodobieństwa, który polega na przeważaniu prawdopodobieństw bardzo niskich i zaniżaniu prawdopodobieństw średnich i wysokich. Taką funkcję ważącą opisuje przykładowo równanie:

$$\pi(p) = \frac{p^{0,5}}{(p^{0,5} + (1-p)^{0,5})^2}\,. \tag{4}$$

Tabela 1 przedstawia wyniki obliczeń dla loterii $\mathbf{x}^1$.

Tabela 1. Wagi decyzyjne dla przykładowej loterii $\mathbf{x}^1$

Wypłata	p	Pozycja rankingowa F	Waga Prawdopodobieństwa π	Waga decyzyjna w w teorii RDEU
$x_1 = 5$	0,25	0,25	0,27	$w_1 = \pi(1) - \pi(0,75) = 0,53$
$x_2 = 10$	0,25	0,5	0,27	$w_2 = \pi(0,75) - \pi(0,5) = 0,11$
$x_3 = 15$	0,25	0,75	0,27	$w_3 = \pi(0,5) - \pi(0,25) = 0,09$
$x_4 = 20$	0,25	1	0,27	$w_4 = \pi(0,25) = 0,27$

Źródło: opracowanie własne.

Przyjęta funkcja ważąca o kształcie odwróconego S odzwierciedla skłonność decydentów do przeceniania niskich prawdopodobieństw dlatego niskie prawdopodobieństwo 0,25 postrzegane jest przez decydenta jako wyższe 0,27. Prawdopodobieństwa subiektywne π są niezależne od wielkości wypłat. Zależą one tylko od prawdopodobieństwa, stąd waga jest jednakowa dla każdej wypłaty. Przykład ilustruje, jak silny jest wpływ pozycji rankingowej wypłaty na wagi prawdopodobieństwa w teorii RDEU. Łatwo też zauważyć, że wagi decyzyjne, określone na prawdopodobieństwach skumulowanych w teorii RDEU, spełniają warunek unormowania[3].

Dalej dokonano analogicznych obliczeń dla loterii $\mathbf{x}^2$. Wyniki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wagi decyzyjne dla przykładowej loterii $\mathbf{x}^2$

Wypłata	p	Pozycja rankingowa F	Waga prawopodobieństwa π	Waga decyzyjna w w teorii RDEU
$x_1 = 5$	0,5	0,5	0,35	$w_1 = \pi(1) - \pi(0,5) = 0,64$
$x_2 = 10$	0,25	0,75	0,27	$w_2 = \pi(0,5) - \pi(0,25) = 0,09$
$x_3 = 30$	0,25	1	0,27	$w_3 = \pi(0,25) = 0,27$

Źródło: opracowanie własne.

Porównanie obliczonych wag potwierdza, że dla wypłat o tej samej pozycji rankingowej i tym samym prawdopodobieństwie waga decyzyjna jest taka sama. Trzecia z kolei wypłata w loterii pierwszej $x_3^1 = 15$ ma taką samą wagę prawdopodobieństwa jak druga z kolei wypłata w loterii drugiej $x_2^2 = 10$. Podobnie jest dla wypłat 20 i 30. Z kolei pierwsze wypłaty w obu loteriach są takie same, lecz ich wagi decyzyjne różnią się ze względu na różnicę w

[3] Suma wag jest równa 1.

prawdopodobieństwach. Waga decyzyjna nie zależy więc ani od miejsca w kolejności, ani też od wysokości wypłaty.

Prognozy oparte na modelu RDEU zależą od formy funkcji $\pi(\cdot)$. Krzywizna krzywej $\pi(\cdot)$ interpretowana jest jako odzwierciedlenie optymizmu lub pesymizmu decydenta. Postawa pesymistyczna wynika z irracjonalnego przekonania, że nieprzychylne zdarzenia występują częściej. Pesymista przecenia więc prawdopodobieństwa ich wystąpienia lub przykłada szczególnie dużą wagę do tego typu zdarzeń podczas oceny perspektywy losowej. Analogicznie jest w przypadku optymisty. Uważa on, że zdarzenia sprzyjające występują znacznie częściej, co powoduje, że odbiera on prawdopodobieństwo ich wystąpienia jako większe, niż jest w rzeczywistości (Diecidue, Wakker, 2001, s. 284).

Związek między krzywizną krzywej π a optymizmem lub pesymizmem ujawni następująca analiza. Formułę (1), wyznaczającą wagi decyzyjne, można zapisać równoważnie w postaci:

$$w = \pi(p + (1 - F)) - \pi(1 - F) \tag{5}$$

W przypadku pesymisty, zwiększanie pozycji rankingowej F, czyli prawdopodobieństwa otrzymania wypłaty gorszej lub równej, prowadzi do obniżania wagi decyzyjnej tej wypłaty. Funkcja (5) maleje wraz ze wzrostem F, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja π jest wypukła. Analogicznie w przypadku optymisty funkcja (5) rośnie wraz ze wzrostem F, co ma miejsce tylko wtedy, gdy funkcja π jest wklęsła (Diecidue, Wakker, 2001, s. 288).

Pesymizm ma ścisły związek z awersją do ryzyka. Gracz pesymista z wklęsłą krzywą użyteczności $U(\cdot)$ będzie zawsze asekurantem, zaś gracz z wypukłą krzywą użyteczności może wykazywać awersję do ryzyka, jeżeli ma wystarczająco pesymistyczny stosunek do gry (Starmer, 2000, s. 347-348).

Takie jednoparametrowe rozwinięcie modelu użyteczności oczekiwanej istotnie zwiększyło możliwości predykcyjne teorii w odniesieniu do znacznej liczby przeprowadzonych eksperymentów. Koncepcja Quiggina została zaadaptowana do teorii perspektywy, gdzie wprowadzono wagi zróżnicowane dla zysków i strat. Powstała w ten sposób teoria skumulowanej perspektywy, rozwinięta algorytmiczna wersja teorii perspektywy Kahnemana i Tverskiego (Tversky, Kahneman, 1992).

Interpretacja paradoksu przy zastosowaniu symulacji

Kahneman i Tversky za przyczynę niespójnych wyborów w eksperymencie Allaisa podają występowanie efektu pewności[4] (Kahneman, Tversky, 1979, s. 266). Efekt pewności jest przejawem subiektywnego stosunku do prawdopodobieństwa i może być modelowany za pomocą funkcji ważącej prawdopodobieństwo. W mechanizm ten wyposażona jest teoria RDEU, dlatego też jest ona w stanie wyjaśnić efekt Allaisa. W celu uzasadnienia tego faktu analizowany jest przykład (analiza danych symulacyjnych).

W przykładzie posłużono się funkcją użyteczności majątku asekuranta:

$$U(x) = \sqrt[20]{x}\,.$$

Funkcja została tak dobrana, aby wyjaśniać preferencję decyzji A z pary {A, B} w teorii użyteczności oczekiwanej.

Funkcja ważąca prawdopodobieństwa w teorii RDEU w tym przykładzie jest taka sama jak poprzednio, czyli opisuje ją formuła (4). Obliczenia i wyniki pokazano w tabeli 3.

[4] Efekt pewności (*certainty effect*) mówi o tym, że ludzie relatywnie przeceniają pewność, tzn. wolą pewny zysk od loterii o tej samej lub wyższej wartości oczekiwanej lub też wolą loterię od pewnej straty (Tyszka, Zaleśkiewicz, 2001, s. 109-113).

Tabela 3. Paradoks Allaisa w teorii EU i RDEU

Loteria	Użyteczność w teorii EU	Użyteczność w teorii RDEU
A: 1 mln	EU(A) = 1,9952	V(A) = 1,9952
B: 0, 0.01 1 mln, 0.89 5 mln, 0.1	EU(B) = 1,9920	$w(0.01) = 0.1702$ $w(0.89) = 0.6322$ $w(0.1) = 0.1976$ V(B) = 1,6888
C: 0, 0.89 1 mln, 0.11	EU(C) = 0,2195	$w(0.89) = 0.7960$ $w(0.11) = 0.2040$ V(C) = 0,4070
D: 0, 0.9 5 mln, 0.1	EU(D) = 0,2162	$w(0.9) = 0.8024$ $w(0.1) = 0.1976$ V(D) = 0,4274

Źródło: opracowanie własne.

Badania empiryczne wykazały, że ludzie preferują loterię A nad loterię B. Zarówno w teorii użyteczności oczekiwanej, jak i w teorii konfiguralnie ważonej użyteczności użyteczność z loterii A jest wyższa od użyteczności z loterii B (EU(A)>EU(B) oraz V(A)>V(B)).

W teorii użyteczności oczekiwanej, podmiot preferujący A nad B preferować będzie jednocześnie perspektywę C nad D. I rzeczywiście w teorii tej EU(C)>EU(D). W teorii RDEU z kolei takie ograniczenie nie występuje. Przy odpowiednio dobranej funkcji ważącej prawdopodobieństwa postaci (4), użyteczność perspektywy D jest wyższa od użyteczności z perspektywy C (V(D)>V(C)). Oznacza to, że istnieje taka funkcja użyteczności, która wyjaśnia zachowanie takie jak w paradoksie Allaisa, zgodnie z teorią konfiguralnie ważonej użyteczności.

Teoria wyboru w warunkach ryzyka zajmuje się między innymi badaniem rzeczywistych wyborów podmiotów indywidualnych oraz podejmuje próbę algorytmizacji procesów decyzyjnych. Jej rozwój przyczynia się do poszerzania wiedzy z zakresu wzorców podejmowania decyzji. Usiłuje się przy tym odróżnić zachowania uzasadnione i spójne od błędnych czy przypadkowych.

W wyniku prowadzonych badań eksperymentalnych wyodrębniane wzorce często nazywane są paradoksami wyboru, zwłaszcza gdy okazują się niezgodne z obowiązującą teorią. Może to sugerować, że taki wzorzec zachowań jest niespójny czy nieracjonalny z punktu widzenia przesłanek ekonomicznych. Przykładem takim może być opisany w artykule paradoks Allaisa.

Celem artykułu było pokazanie pewnej słabości metodologicznej toku myślenia, mającego weryfikować założenie o racjonalności na podstawie dorobku teorii wyboru. Na postawie analizy przykładowych preferencji wykazano, że prosty eksperyment nie wnosi jednoznacznych przesłanek do zanegowania założenia o racjonalności. W ramach rozwoju teorii konwencjonalnych możliwe jest wyjaśnienie tego typu zachowań, co pozwala uznać je za ekonomicznie uzasadnione.

Przedstawiona analiza wydaje się wykazywać, że teoria wyboru w warunkach ryzyka może służyć do badania racjonalności, gdyż jest w stanie jednoznacznie rozstrzygać czy dany wzorzec zachowań można uznać za spójny w kontekście tej teorii i formalnej definicji racjonalności. Jednakże wydaje się, że jako narzędzie badania racjonalności teoria wyboru wciąż nie jest wystarczająco precyzyjna, aby na jej podstawie możliwa była negatywna weryfikacja. Trudno też ocenić, czy taka negatywna wryfikacja, czyli uznanie danego zachowania za nieracjonalne, będzie kiedykolwiek możliwe. Wymagałoby to prawdopodobnie wykazania, że nie istnieje taka konwencjonalna teoria wyboru i taka relacja preferencji, które uzasadniają podjęcie danej decyzji. Prawdopodobnie dalsze badania w tej dziedzinie pozwolą w przyszłości rozstrzygnąć tę kwestię.

BIBLIOGRAFIA:

1. Allais M., (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulates et axiomes de l'ecole americaine, Econometrica, tom 21, nr 4, s. 503–543.
2. Arrow K. J., (1979), Eseje z teorii ryzyka, PWN, Warszawa.
3. Conlisk J., (1989), Three variants on the allais expample, The American Economic Review, tom 79, nr 3, s. 392–407.
4. Diecidue E., Wakker P. P., (2001), On the intuition of rank-dependent utility, The Journal of Risk and Uncertainty, nr 23, s. 281-298.
5. Forlicz S., Jasiński M., (2000), Mikroekonomia, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań.
6. Handa J., (1977), Risk, Probabilities, and a New Theory of Cardinal Utility, Journal of Political Economy, nr 85, s. 97-122.
7. Heilpern S., (2001), Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka i niepewności, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocawiu, Wrocaw.
8. Hirshleifer J., Glazer A., Hirshleifer D., (2005), Price theory and applications, Cambridge.
9. Kahneman D., Tversky A., (1979), Prospect theory: an analysis of decision under risk, Econometrica, tom 47, nr 2, s. 263–292.
10. Kozielecki J., (1975), Psychologiczna teoria decyzji, PWN, Warszawa.
11. Lindgren B. W., (1977), Elementy teorii decyzji, Wydawnictwa naukowo-teczniczne, Warszawa.
12. Machina M. J., (1987), Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved, Economic Perspectives, tom 1, nr 1, s. 121–154.
13. Savage L. J., (1972), The Foundations of Statistics, Dover Publications, New York.
14. Sen A., (1998), Rational behaviour, w: The New Palgrave: A Dictionary of Economics, Macmillan Reference Limited, London.
15. Sokołowska J., (2005), Psychologia decyzji ryzykownych. Ocena prawdopodobieństwa i modele wyboru w sytuacji ryzykownej, wyd. Academica, Warszawa.
16. Starmer C., (2000), Developments in non-expected utility theory: The hunt for a descriptive theory of choice under risk, Journal of Economic Literature, tom 38, s. 332–382.
17. Tversky A., Kahneman D., (1992), Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, nr 5, s. 297–323.
18. Tyszka T., Zaleśkiewicz T., (2001), Racjonalność decyzji. Pewność i ryzyko, PWE, Warszawa.
19. Quiggin J., (1982), A theory of anticipated utility, Journal of Economic Behaviour and Organization, nr 3, s. 323-343.